The linearity of quantum mechanics and the birth of the Schrödinger equation

W.P. Schleich (Ulm & Denton)
D. Greenberger (New York)
D. H. Kobe (Denton)
M.O. Scully (College Station & Princeton)

Overview

- a brief history
- a curious mathematical identity
- Hamilton-Jacobi mechanics
- non-linear Schrödinger equation
- linear Schrödinger equation
- amplitude of quantum wave

Ann. Phys. **79**, 361-376 (1926)

3. *Quantisierung als Eigenwertproblem;*
von E. Schrödinger.

(Erste Mitteilung.)

---

§ 1. In dieser Mitteilung möchte ich zunächst an dem einfachsten Fall des (nichtrelativistischen und ungestörten) Wasserstoffatoms zeigen, daß die übliche Quantisierungsvorschrift sich durch eine andere Forderung ersetzen läßt, in der kein Wort von „ganzen Zahlen" mehr vorkommt. Vielmehr ergibt sich die Ganzzahligkeit auf dieselbe natürliche Art, wie etwa die Ganzzahligkeit der *Knotenzahl* einer schwingenden Saite. Die neue Auffassung ist verallgemeinerungsfähig und rührt, wie ich glaube, sehr tief an das wahre Wesen der Quantenvorschriften.

Die übliche Form der letzteren knüpft an die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung an:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E \,. \tag{1}$$

Es wird von dieser Gleichung eine Lösung gesucht, welche sich darstellt als *Summe* von Funktionen je einer einzigen der unabhängigen Variablen q.

Wir führen nun für S eine neue unbekannte ψ ein derart, daß ψ als ein *Produkt* von eingriffigen Funktionen der einzelnen Koordinaten erscheinen würde. D. h. wir setzen

$$S = K \lg \psi \,. \tag{2}$$

Die Konstante K muß aus dimensionellen Gründen eingeführt werden, sie hat die Dimension einer *Wirkung*. Damit erhält man

$$H\left(q, \frac{K}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = E \,. \tag{1'}$$

Wir suchen nun *nicht* eine Lösung der Gleichung (1'), sondern wir stellen folgende Forderung. Gleichung (1') läßt sich bei Vernachlässigung der Massenveränderlichkeit stets, bei Berücksichtigung derselben wenigstens dann, wenn es sich um das *Ein*elektronenproblem handelt, auf die Gestalt bringen: quadratische

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E$$

$$S = K \lg \psi$$

$$H\left(q, \frac{K}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = E$$

Form von ψ und seinen ersten Ableitungen $= 0$. Wir suchen solche reelle im ganzen Konfigurationenraum eindeutige endliche und zweimal stetig differenzierbare Funktionen ψ, welche das über den ganzen Konfigurationenraum erstreckte Integral der eben genannten quadratischen Form[1]) zu einem *Extremum* machen. *Durch dieses Variationsproblem ersetzen wir die Quantenbedingungen.*

Wir werden für H zunächst die Hamiltonsche Funktion der Keplerbewegung nehmen und zeigen, daß die aufgestellte Forderung für *alle positiven*, aber nur für eine *diskrete Schar von negativen* E-Werten erfüllbar ist. D. h. das genannte Variationsproblem hat ein diskretes und ein kontinuierliches Eigenwertspektrum. Das diskrete Spektrum entspricht den Balmerschen Termen, das kontinuierliche den Energien der Hyperbelbahnen. Damit numerische Übereinstimmung bestehe, muß K den Wert $h/2\pi$ erhalten.

Da für die Aufstellung der Variationsgleichungen die Koordinatenwahl belanglos ist, wählen wir rechtwinkelige kartesische. Dann lautet (1′) in unserem Fall (e, m sind Ladung und Masse des Elektrons):

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{{}^2}{r}\right)\psi^2 = 0 \; . \tag{1″}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \; .$$

Und unser Variationsproblem lautet

$$\left\{\begin{aligned} \delta J = \delta \iiint dx\,dy\,dz \Bigg[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \\ - \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi^2\Bigg] = 0 \; , \end{aligned}\right. \tag{3}$$

das Integral erstreckt über den ganzen Raum. Man findet daraus in gewohnter Weise

$$\left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\,\delta J = \int df\,\delta\psi\,\frac{\partial\psi}{\partial n} - \iiint dx\,dy\,dz\,\delta\psi \Bigg[\Delta\,\psi + \\ + \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi\Bigg] = 0 \; . \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Es muß also erstens

$$\Delta\psi + \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0 \tag{5}$$

1) Es entgeht mir nicht, daß diese Formulierung nicht ganz eindeutig ist.

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{{}^2}{r}\right)\psi^2 = 0$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \; .$$

$$\delta J = \delta \iiint dx\,dy\,dz \Bigg[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \\ - \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi^2\Bigg] = 0 \; ,$$

$$\Delta\psi + \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0$$

1926. № 6.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 79.

1. *Quantisierung als Eigenwertproblem;*

von E. Schrödinger.

(Zweite Mitteilung.)[1]

§ 1. Die Hamiltonsche Analogie zwischen Mechanik und Optik.

Bevor wir daran gehen, das Eigenwertproblem der Quantentheorie für weitere spezielle Systeme zu behandeln, wollen wir den *allgemeinen* Zusammenhang näher beleuchten, welcher zwischen der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung (H. P.) eines mechanischen Problems und der „zugehörigen" *Wellengleichung*, d. i. im Falle des Keplerproblems der Gleichung (5) der ersten Mitteilung, besteht. Wir hatten diesen Zusammenhang vorläufig nur kurz seiner äußeren analytischen Struktur nach beschrieben durch die an sich unverständliche Transformation (2) und den ebenso unverständlichen Übergang von der *Nullsetzung* eines Ausdrucks zu der Forderung, daß das *Raumintegral* des nämlichen Ausdruckes *stationär* sein soll.[2])

§ 2. „Geometrische" und „undulatorische" Mechanik.

Wir machen zunächst die Annahme, daß es ein zutreffender Ausbau der Analogie ist, die oben betrachteten Wellensysteme als *Sinus*wellen aufzufassen. Das ist das einfachste und naheliegendste, doch muß die *Willkür*, die darin liegt, wegen der *grundlegenden Bedeutung* dieser Annahme unterstrichen werden. Es soll also die Wellenfunktion die Zeit nur in Form eines Faktors sin(.....) enthalten, dessen Argument eine lineare Funktion von W ist. Der Koeffizient von W muß, da W eine Wirkung, die Phase eines Sinus aber eine unbenannte Zahl ist, die Dimension einer reziproken Wirkung haben. Wir nehmen an, daß er universell sei, d. h. nicht bloß von E, sondern auch von der Natur des mechanischen Systems unabhängig. Wir dürfen ihn wohl sogleich mit $2\pi/h$ bezeichnen. Der Zeitfaktor lautet also

$$\sin\left(\frac{2\pi W}{h} + \text{const}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi E t}{h} + \frac{2\pi S(q_k)}{h} + \text{const}\right). \tag{10}$$

Damit ergibt sich die *Frequenz* ν der Wellen zu

$$\nu = \frac{E}{h}. \tag{11}$$

Es ergibt sich also die Frequenz der q-Raumwellen ohne merkliche Künstelei der Systemenergie proportional.[2]) Das hat

$$\sin\left(\frac{2\pi W}{h} + \text{const}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi E t}{h} + \frac{2\pi S(q_k)}{h} + \text{const}\right)$$

$$\nu = \frac{E}{h}$$

(18) $$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi - \frac{1}{u^2}\ddot{\psi} = 0$$

gültig für Vorgänge, welche von der Zeit nur durch einen Faktor $e^{2\pi i\nu t}$ abhängen. Das heißt also, mit Beachtung von (6), (6′) und (11)

(18′) $$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(h\nu - V)\psi = 0,$$

bzw.

(18″) $$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(E - V)\psi = 0.$$

Die Differentialoperationen sind selbstverständlich mit Beziehung auf das Linienelement (3) zu verstehen. — Aber selbst unter den Ansätzen zweiter Ordnung ist dieser nicht der einzige mit (6) verträgliche, es wäre die Verallgemeinerung möglich, daß man div grad ψ durch

(19) $$f(q_k)\operatorname{div}\left(\frac{1}{f(q_k)}\operatorname{grad}\psi\right)$$

ersetzt, wo f eine beliebige Funktion der q_k sein kann, die freilich plausibler Weise irgendwie von E, $V(q_k)$ und den Koeffizienten des Linienelements (3) abhängen müßte (man könnte z. B. an $f = u$ denken). Unser Ansatz ist wieder von dem Bestreben nach Einfachheit diktiert, doch halte ich diesfalls eine Irreleitung nicht für ausgeschlossen.[1])

Die Unterschiebung einer *partiellen* Differentialgleichung als Ersatz der Grundgleichungen der Dynamik für die Atomprobleme erscheint nun im ersten Augenblick äußerst mißlich wegen der ungeheuren Mannigfaltigkeit von Lösungen, die einer solchen Gleichung eignet. Schon die klassische Dynamik hatte nicht etwa auf eine zu beschränkte, sondern auf eine viel zu umfangreiche Mannigfaltigkeit von Lösungen geführt, nämlich auf eine *kontinuierliche Schar*, während nach aller Erfahrung nur eine diskontinuierliche Menge dieser Lösungen verwirklicht zu sein scheint. Die Aufgabe der Quantentheorie ist nach der herrschenden Auffassung gerade die, aus der kontinuierlichen Schar der nach der klassischen Mechanik möglichen Bahnen, die diskrete Schar der wirklich auftretenden

1) Die Einführung von $f(q_k)$ bedeutet, daß nicht bloß die „Dichte“, sondern auch die „Elastizität“ mit dem Orte variiert.

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi - \frac{1}{u^2}\ddot{\psi} = 0$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(h\nu - V)\psi = 0$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(E - V)\psi = 0$$

1926 № 18

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE. BAND 81

1. *Quantisierung als Eigenwertproblem;*

von E. Schrödinger

(Vierte Mitteilung[1])

Inhaltsübersicht: § 1. Elimination des Energieparameters aus der Schwingungsgleichung. Die eigentliche Wellengleichung. Nichtkonservative Systeme. — § 2. Ausdehnung der Störungstheorie auf Störungen, welche explizite die Zeit enthalten. Dispersionstheorie. — § 3. Ergänzungen zu § 2: Angeregte Atome, entartete Systeme, Streckenspektrum. — § 4. Erörterung des Resonanzfalles. — § 5. Verallgemeinerung für eine beliebige Störung. — § 6. Relativistisch-magnetische Verallgemeinerung der Grundgleichungen. — § 7. Über die physikalische Bedeutung des Feldskalars.

§ 1. Elimination des Energieparameters aus der Schwingungsgleichung. Die eigentliche Wellengleichung. Nichtkonservative Systeme

Die Wellengleichung (18) bzw. (18″) von S. 510 der zweiten Mitteilung

$$\Delta\psi - \frac{2(E-V)}{E^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

bzw.

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(E-V)\psi = 0, \tag{1'}$$

welche das *Fundament* der in dieser Abhandlungsreihe versuchten Neubegründung der Mechanik bildet, leidet an dem Übelstand, daß sie das Veränderungsgesetz für den „mechanischen Feldskalar" ψ nicht *einheitlich* und nicht *allgemein* ausspricht. Gleichung (1) enthält nämlich den Energie- oder Frequenzparameter E und ist, wie a. a. O. ausdrücklich betont, mit einem *bestimmten* E-Wert gültig für Vorgänge, welche

1) Vgl. Ann. d. Phys. 79. S. 361. 489; 80. S. 437. 1926; ferner über den Zusammenhang mit der Heisenbergschen Theorie: ebendort 79. S. 734.

$$\Delta\psi - \frac{2(E-V)}{E^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2}{h^2}(E-V)\psi = 0$$

von der *Zeit* ausschließlich durch einen *bestimmten* periodischen Faktor abhängen

$$\psi \sim P \cdot R \cdot \left(e^{\pm \frac{2\pi i E t}{h}}\right). \tag{2}$$

Gleichung (1) ist daher in Wirklichkeit um nichts allgemeiner als die Gleichung (1′), welche dem eben genannten Umstand Rechnung trägt und die Zeit gar nicht mehr enthält.

Wenn wir also Gleichung (1) oder (1′) gelegentlich als „Wellengleichung“ bezeichnet haben, so geschah das eigentlich zu Unrecht, sie wäre richtiger als „Schwingungs-“ oder „Amplituden“gleichung zu bezeichnen. Wir fanden aber mit ihr das Auslangen, weil ja an *diese* das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem sich knüpft — ganz ebenso wie bei dem mathematisch völlig analogen Problem der freien Schwingungen von Saiten und Membranen — und nicht an die *eigentliche* Wellengleichung.

Dabei hatten wir bisher stets vorausgesetzt, daß die potentielle Energie V eine reine Koordinatenfunktion ist und *nicht* explizite von der Zeit abhängt. Es besteht aber das dringende Bedürfnis, die Theorie auf *nichtkonservative* Systeme auszudehnen, weil sich nur auf diese Weise das Verhalten des Systems unter der Einwirkung vorgegebener äußerer Kräfte, z. B. einer Lichtwelle oder eines vorüberfliegenden fremden Atoms, studieren läßt. Sobald nun aber V die Zeit explizite enthält, ist es offenbar *unmöglich*, der Gleichung (1) bzw. (1′) zu genügen durch eine Funktion ψ, welche nur nach (2) von der Zeit abhängt. Man findet also dann mit der Amplitudengleichung nicht mehr das Auslangen, sondern muß auf die eigentliche Wellengleichung greifen.

Für konservative Systeme läßt sich dieselbe leicht angeben. (2) ist ja gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2 E^2}{h^2}\psi. \tag{3}$$

Aus (1′) und (3) kann man E durch Differentiationen eliminieren und erhält in leichtverständlicher symbolischer Schreibweise

$$\left(\Delta - \frac{8\pi^2}{h^2}V\right)^2 \psi + \frac{16\pi^2}{h^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \tag{4}$$

Dieser Gleichung hat jedes ψ zu genügen, welches nach (2), jedoch *mit beliebigem* E, von der Zeit abhängt; folglich auch

$$\psi \sim P \cdot R \cdot \left(e^{\pm \frac{2\pi i E t}{h}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2 E^2}{h^2}\psi$$

$$\left(\Delta - \frac{8\pi^2}{h^2}V\right)^2 \psi + \frac{16\pi^2}{h^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

der bisher entwickelten Theorie konservativer Systeme gelten kann. Ihre Verallgemeinerung für den Fall einer zeitlich variablen Potentialfunktion erfordert immerhin einige Vorsicht, weil dabei Glieder mit zeitlichen Ableitungen von V auftreten können, über die uns die Gleichung (4) nach der Art ihrer Gewinnung natürlich keinen Aufschluß geben kann. In der Tat stößt man nun bei dem Versuch, die Gleichung (4), wie sie dasteht, auf nichtkonservative Systeme zu übertragen, auf Komplikationen, die von einem Glied mit $\partial V / \partial t$ herzurühren scheinen. Ich habe daher im folgenden einen etwas anderen Weg betreten, der rechnerisch außerordentlich viel einfacher ist und den ich für prinzipiell richtig halte.

Man *muß* die Ordnung der Wellengleichung nicht auf vier hinaufdrücken, um den Energieparameter aus ihr zu entfernen. Die für die Gültigkeit von (1′) erforderliche Zeitabhängigkeit von ψ läßt zich statt durch (3) auch durch

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \pm \frac{2 \pi i}{h} E \psi \tag{3'}$$

ausdrücken. Man kommt dann zu einer der beiden Gleichungen

$$\Delta \psi - \frac{8\pi^2}{h^2} V \psi \mp \frac{4 \pi i}{h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 . \tag{4''}$$

Wir werden verlangen, daß die komplexe Wellenfunktion ψ einer dieser beiden Gleichungen genüge. Da alsdann die konjugiert komplexe Funktion $\bar{\psi}$ der *anderen* Gleichung genügt, wird man als reelle Wellenfunktion (wenn man sie benötigt) den Realteil von ψ ansehen dürfen. — Im Fall eines konservativen Systems ist (4″) mit (4) wesentlich äquivalent, da sich, wenn V die Zeit nicht enthält, der reelle Operator in das Produkt der zwei konjugiert komplexen zerlegen läßt.

§ 2. Ausdehnung der Störungstheorie auf Störungen, welche explizite die Zeit enthalten. Dispersionstheorie

Das Hauptinteresse richtet sich nicht auf Systeme, bei denen die zeitlichen Schwankungen der potentiellen Energie V von derselben Größenordnung sind, wie die räumlichen, sondern auf Systeme, die, an sich konservativ, durch Hinzutritt kleiner vorgegebener Funktionen der Zeit (und der

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \pm \frac{2 \pi i}{h} E \psi$$

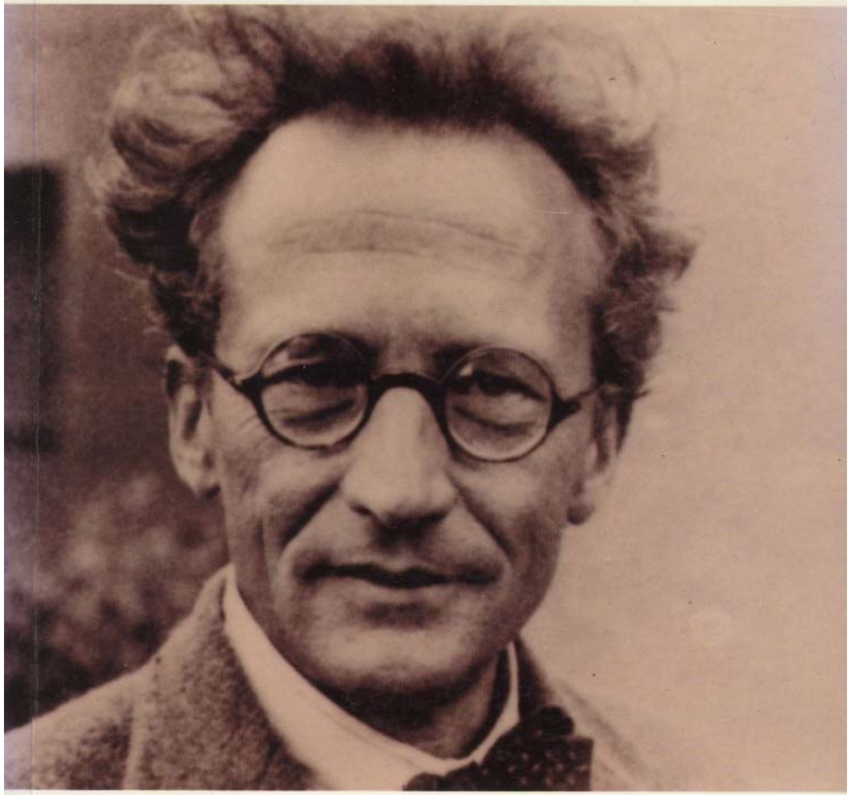
$$\Delta \psi - \frac{8\pi^2}{h^2} V \psi \mp \frac{4 \pi i}{h} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

10. Erwin and Annemarie, wedding picture, March 1920

9. Schrödinger as *Leutnant* in the Fortress Artillery, at the front, 1916

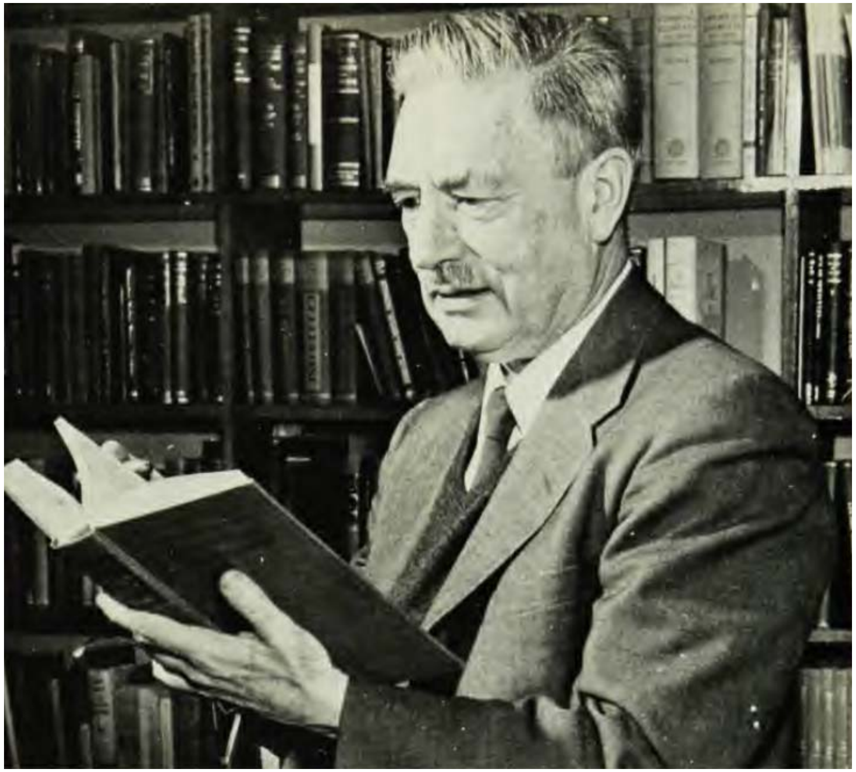
A Life of Erwin Schrödinger

WALTER MOORE



Canto

Heisenberg



Debye

Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 465-478 (1918)

Gravitation und Elektrizität.

Von Prof. Dr. Hermann Weyl
in Zürich.

(Vorgelegt von Hrn. Einstein am 2. Mai 1918 [s. oben S. 433].)

Nach Riemann[1] beruht die Geometrie auf den beiden folgenden Tatsachen:

1. Der Raum ist ein dreidimensionales Kontinuum, die Mannigfaltigkeit seiner Punkte läßt sich also in stetiger Weise durch die Wertsysteme dreier Koordinaten $x_1\ x_2\ x_3$ zur Darstellung bringen;

2. (Pythagoreischer Lehrsatz) das Quadrat des Abstandes ds^2 zweier unendlich benachbarter Punkte

$$P = (x_1, x_2, x_3) \text{ und } P' = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) \tag{1}$$

ist (bei Benutzung beliebiger Koordinaten) eine quadratische Form der relativen Koordinaten dx_i:

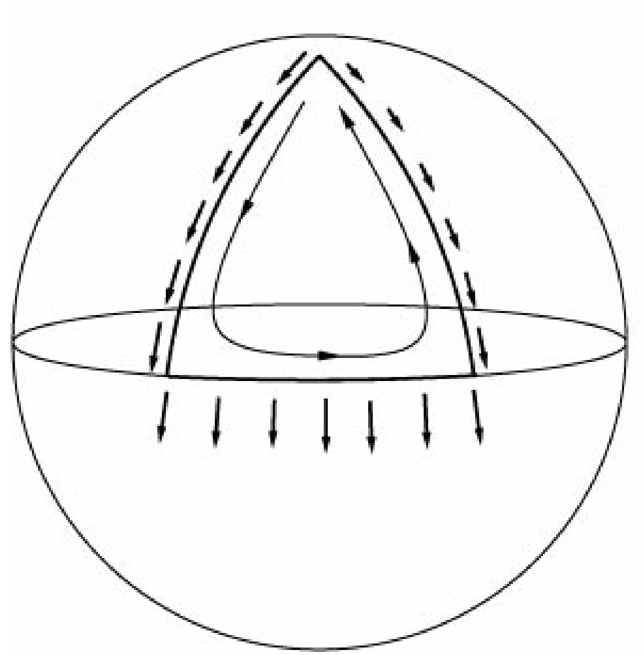
$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (g_{ki} = g_{ik})\,. \tag{2}$$

Die zweite Tatsache drücken wir kurz dadurch aus, daß wir sagen: der Raum ist ein metrisches Kontinuum. Ganz dem Geiste der modernen Nahewirkungsphysik gemäß setzen wir den Pythagoreischen Lehrsatz nur im Unendlichkleinen als streng gültig voraus.

Die spezielle Relativitätstheorie führte zu der Einsicht, daß die Zeit als vierte Koordinate (x_0) gleichberechtigt zu den drei Raumkoordinaten hinzutritt, daß der Schauplatz des materiellen Geschehens, die Welt, also ein vierdimensionales, metrisches Kontinuum ist. Die quadratische Form (2), welche die Weltmetrik festlegt, ist dabei nicht positiv-definit wie im Falle der dreidimensionalen Raumgeometrie, sondern vom Trägheitsindex 3. Schon Riemann äußerte den Gedanken, daß sie als etwas physisch Reales zu betrachten sei, da sie sich z. B. in den Zentrifugalkräften als eine auf die Materie reale Wirkungen ausübende Potenz offenbart, und daß man demgemäß anzunehmen

[1] Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen: Math. Werke (2. Aufl., Leipzig 1892), Nr. XIII, S. 272.

Weyl's Streckenfaktor



$$L = L_0 \exp\left(-\frac{e}{\gamma}\int \mathrm{d}x_\mu \, A^\mu\right)$$

Z. Phys. **12**, 13-23 (1922)

Über eine bemerkenswerte Eigenschaft der Quantenbahnen eines einzelnen Elektrons.

Von **Erwin Schrödinger** in Zürich.

(Eingegangen am 5. Oktober 1922.)

Der „Streckenfaktor“ (2) wird

$$e^{-\frac{e}{\gamma}\int(V\,dt-\mathfrak{A}_x\,dx-\mathfrak{A}_y\,dy-\mathfrak{A}_z\,dz)}. \tag{5}$$

Die in der Überschrift angekündigte, mir bemerkenswert scheinende Eigenschaft der Quantenbahnen ist nun die, daß die „echten“ Quantenbedingungen, d. h. diejenigen, welche zur Festlegung der Energie und damit des Spektrums hinreichen, auch gerade hinreichen, um den Exponenten des Streckenfaktors (5) zu einem ganzzahligen Vielfachen von $\gamma^{-1}h$ zu machen (welches nach obigem eine reine Zahl ist) für alle approximativen Perioden des Systems. Ich will dies zunächst für die einzelnen Fälle nachweisen, da doch noch einige Wenn und Aber daran zu knüpfen sind, wenn man den Satz in der einfachen Form ausspricht, wie soeben geschehen. Dann erst will ich die eventuelle Bedeutung der Tatsache diskutieren, womit ich übrigens — um es gleich zu gestehen — nicht sehr weit gekommen bin.

Man fühlt sich versucht, zu raten, welchen Wert die universelle Konstante γ wohl haben mag. Wohlvertraut sind uns zwei universelle Konstante von der Dimension einer Wirkung, nämlich h und $\frac{e^2}{c}$ (ich für meinen Teil bin überzeugt, daß sie voneinander nicht unabhängig sind). Wäre $\gamma \simeq \frac{e^2}{c}$, so wäre der universelle Faktor (22) eine sehr große Zahl[1]) von der Ordnung e^{1000}. Die andere Möglichkeit, $\gamma \simeq h$, legt den Gedanken nahe, ob für γ nicht der rein imaginäre Wert

$$\gamma = \frac{h}{2\pi\sqrt{-1}}$$

denkbar ist, wo dann der universelle Faktor (22) der Einheit gleich würde und die Maßzahl einer mitgeführten Strecke sich nach jeder Quasiperiode reproduzieren würde. — Ich wage nicht zu entscheiden, ob dergleichen im Rahmen der Weylschen Weltgeometrie sinnvoll sein könnte.

Z. Phys. **42**, 375-389 (1927)

Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl[1]).

Von **F. London** in Stuttgart.

(Eingegangen am 25. Februar 1927.)

Ich behaupte, mit dieser naheliegenden Vorschrift über den Weg wird Weyls Skalar l numerisch identisch mit dem de Broglieschen Feldskalar ψ. Hierzu sind noch zwei Präzisierungen zu treffen:

In dem Weylschen Eichmaß war noch ein Faktor α unbestimmt gelassen; für diesen mache ich die Hypothese, er sei gleich $\frac{2\pi i e}{h c}$. Also

$$l = l_0 \, e^{\frac{2\pi i}{h} \int \frac{e}{c} \Phi_i \, d x^i}. \qquad (2\,a)$$

Z. Phys. **56**, 330-352 (1929)

Elektron und Gravitation. I.

Von **Hermann Weyl** in Princeton, N. J.

(Eingegangen am 8. Mai 1929).

2. Die Diracschen Feldgleichungen für ψ zusammen mit den Maxwellschen Gleichungen für die vier Potentiale f_p des elektromagnetischen Feldes haben eine Invarianzeigenschaft, die in formaler Hinsicht derjenigen gleicht, die ich in meiner Theorie von Gravitation und Elektrizität vom Jahre 1918 als Eichinvarianz bezeichnet hatte; die Gleichungen bleiben ungeändert, wenn man gleichzeitig

$$\psi \text{ durch } e^{i\lambda}\cdot\psi \quad \text{und} \quad f_p \text{ durch } f_p - \frac{\partial \lambda}{\partial x_p}$$

$$\psi \text{ durch } e^{i\lambda}\cdot\psi \quad \text{und} \quad f_p \text{ durch } f_p - \frac{\partial \lambda}{\partial x_p}.$$

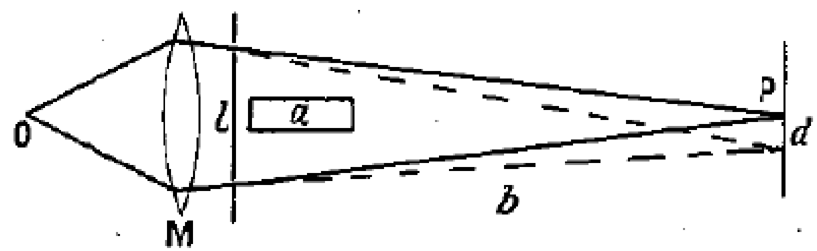
ersetzt, unter λ eine willkürliche Ortsfunktion in der vierdimensionalen Welt verstanden. Dabei ist in f_p der Faktor $\frac{e}{c\hbar}$ aufgenommen ($-e$ Ladung des Elektrons, c Lichtgeschwindigkeit, $\frac{h}{2\pi}$ Wirkungsquantum). Auch die Beziehung dieser „Eichinvarianz" zum Erhaltungssatz der Elektrizität bleibt unangetastet. Es ist aber ein wesentlicher und für den Anschluß an die Erfahrung bedeutungsvoller Unterschied, daß der Exponent des Faktors, den ψ annimmt, nicht reell, sondern rein imaginär ist. ψ übernimmt jetzt die Rolle, welche in jener alten Theorie das Einsteinsche ds spielte. Es scheint mir darum dieses nicht aus der Spekulation, sondern aus der Erfahrung stammende neue Prinzip der Eichinvarianz zwingend darauf hinzuweisen, daß das elektrische Feld ein notwendiges Begleitphänomen nicht des Gravitationsfeldes, sondern des materiellen, durch ψ dargestellten Wellenfeldes ist. Da die Eichinvarianz eine willkürliche Funktion λ einschließt, hat sie den Charakter „allgemeiner" Relativität und kann natürlich nur in ihrem Rahmen verstanden werden.

Proc. Phys. Soc. London B **62**, 8-21 (1949)

The Refractive Index in Electron Optics and the Principles of Dynamics

By W. EHRENBERG * and R. E. SIDAY †
* Birkbeck College, University of London † I.C.I. Fellow, Edinburgh University

MS. received 23rd February 1948, *and in amended form 28th July* 1948; *read 3rd December* 1948



O denotes a point source of electrons which is focused by the lens M at the point P. Through the pair of slits separated by l a set of interference fringes will arise so that the distance of the nth maximum from P is given by $d=b\lambda_0 n/l$. If, now, a magnetic flux is established normal to the plane of the paper through the area a, then, according to (43), the order of interference at any point of the focal plane is changed by

$$N=\frac{1}{\lambda_0(H\rho)}\iint H_n d\sigma, \quad \text{or with (35) by} \quad N=(\mathbf{e}/\mathbf{c}\boldsymbol{h})\iint H_n d\sigma. \qquad \ldots\ldots(50)$$

Thus, a flux of $3{\cdot}9\times10^{-7}$ gauss cm² is required to change the order of interference by 1, and half of this flux will change the maximum at P to a minimum.

It is very curious that equation (50) associates a phenomenon observable at least in principle with a flux; one expects a change of flux, but not steady flux, to have observable effects. The effect has, however, a certain analogy in the existence of a permanent current in a superconducting ring due to a magnetic flux through it.

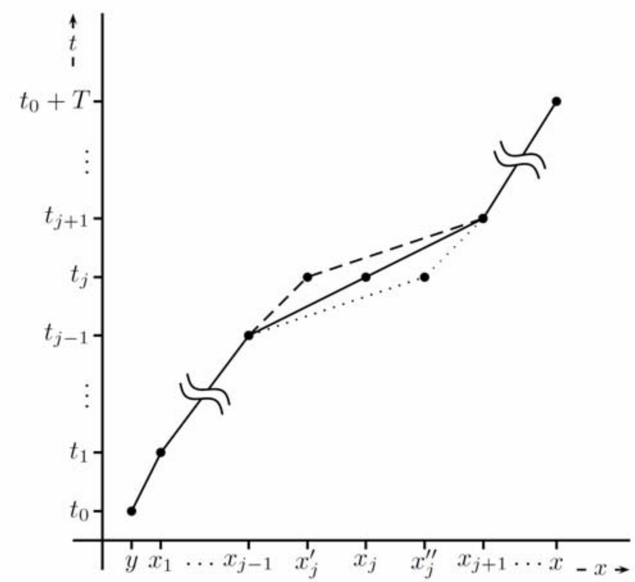
REVIEWS OF
MODERN PHYSICS

VOLUME 20, NUMBER 2 APRIL, 1948

Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics

R. P. FEYNMAN

Cornell University, Ithaca, New York



$$\psi(x, t_0 + T) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y\; G(x, t_0 + T \mid y, t_0)\; \psi(y, t_0)$$

$$G(x, t_0 + T \mid y, t_0) = \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_N \;\ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1\; \mathcal{N}^{N+1}$$

$$\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_{j=0}^{N} \tau \left\{\frac{1}{2}M\left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\tau}\right)^2 - V(x_j)\right\}\right].$$

Z. Phys. **22**, 193-199 (1924)

Zur Quantenoptik.

Von **Gregor Wentzel** in München.

(Eingegangen am 2. Februar 1924.)

Stehen dem Lichtquant verschiedene Wege s von E nach A zur Verfügung, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß es auf einem beliebigen der Wege s nach A gelangt und dort absorbiert wird, nicht etwa gleich der Summe der Apriori-Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Lichtwege s, sondern J mal so groß, wo

$$J = \frac{(\mathfrak{F}\widetilde{\mathfrak{F}})}{|\mathfrak{F}_0|^2}, \tag{8}$$

$$\mathfrak{F}_0 = \sum_s \mathfrak{f}_s, \quad \mathfrak{F} = \sum_s \mathfrak{f}_s e^{2\pi i \cdot \varphi_s}. \tag{9}$$

Hier bedeuten φ_s die Phasen (2), genommen über die einzelnen Wege s, und $\mathfrak{f}_s$ die vektoriellen Amplituden der klassischen Wellen, auf deren Quantenbedeutung wir in § 3 zurückkommen.

Eur. Phys. J. D **10**, 311–318 (2000)

THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL D

EDP Sciences

Time dependence in quantum mechanics

J.S. Briggs[a] and J.M. Rost[b]

Institute for Advanced Study, Wallotstrasse 19, 14193 Berlin, Germany

Received 25 October 1999

Abstract. It is shown that the time-dependent equations (Schrödinger and Dirac) for a quantum system can be derived from the time-independent equation for the larger object of the system interacting with its environment, in the limit that the dynamical variables of the environment can be treated semiclassically. The time which describes the quantum evolution is then provided parametrically by the classical evolution of the environment variables. The method used is a generalization of that known for a long time in the field of ion-atom collisions, where it appears as a transition from the full quantum mechanical *perturbed stationary states* to the impact parameter method in which the projectile ion beam is treated classically.

INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING JOURNAL OF PHYSICS A: MATHEMATICAL AND GENERAL

J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002) 3289–3303 PII: S0305-4470(02)31884-5

Schrödinger equation from an exact uncertainty principle

Michael J W Hall[1] **and Marcel Reginatto**[2,3]

[1] Theoretical Physics, IAS, Australian National University, Canberra, ACT 0200, Australia
[2] US Department of Energy, Environmental Measurements Laboratory, New York, NY 10014-4811, USA

Received 10 December 2001
Published 29 March 2002
Online at stacks.iop.org/JPhysA/35/3289

Abstract

An exact uncertainty principle, formulated as the assumption that a classical ensemble is subject to random momentum fluctuations of a strength which is determined by and scales inversely with uncertainty in position, leads from the classical equations of motion to the Schrödinger equation.

A curious mathematical identity

$$\frac{\mathrm{i}\hbar}{2A}\left[\frac{\partial}{\partial t}A^2+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(A^2\,\frac{\boldsymbol{\nabla}S}{m}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}S/\hbar}-\left[\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{(\boldsymbol{\nabla}S)^2}{2m}+V-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\boldsymbol{\nabla}^2A}{A}\right]\Phi=\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\hat{H}\,\Phi$$

$$\hat{H}\equiv-\frac{\hbar^2}{2m}\,\boldsymbol{\nabla}^2+V$$

$$A(\boldsymbol{r},t)\equiv\Phi(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}S(\boldsymbol{r},t)/\hbar}$$

Classical mechanics à la Hamilton-Jacobi

$$S^{(\mathrm{cl})} \equiv S^{(\mathrm{cl})}(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{\varepsilon})$$

$$-\frac{\partial S^{(\mathrm{cl})}}{\partial t} = \frac{(\boldsymbol{\nabla} S^{(\mathrm{cl})})^2}{2m} + V$$

$$\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{\nabla} S^{(\mathrm{cl})}$$

Wave equation with classical action

$$\frac{\mathrm{i}\hbar}{2A}\left[\frac{\partial}{\partial t}A^2+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(A^2\,\frac{\boldsymbol{\nabla}S}{m}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}S/\hbar}-\left[\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{(\boldsymbol{\nabla}S)^2}{2m}+V-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\boldsymbol{\nabla}^2A}{A}\right]\Phi=\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\hat{H}\Phi$$

$$-\frac{\partial S^{(\mathrm{cl})}}{\partial t}=\frac{(\boldsymbol{\nabla}S^{(\mathrm{cl})})^2}{2m}+V$$

$$\frac{\mathrm{i}\hbar}{2A}\left[\frac{\partial}{\partial t}A^2+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(A^2\,\frac{\boldsymbol{\nabla}S^{(\mathrm{cl})}}{m}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}S^{(\mathrm{cl})}/\hbar}+\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\boldsymbol{\nabla}^2A}{A}\,\Phi=\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\hat{H}\Phi$$

Proc. Nat. Acad. Sci. **14**, 178-188 (1928)

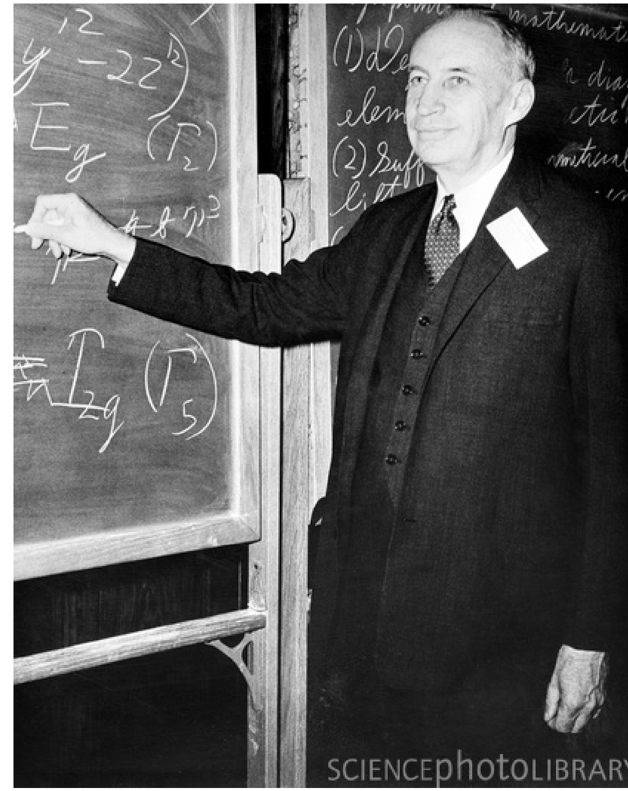
THE CORRESPONDENCE PRINCIPLE IN THE STATISTICAL INTERPRETATION OF QUANTUM MECHANICS

By J. H. Van Vleck

Department of Physics, University of Minnesota

Communicated January 16, 1928

In studying the very significant statistical interpretation put on the quantum mechanics by the "transformation theory" of Dirac[1] and Jordan,[2] the writer at first experienced considerable difficulty in understanding how the quantum formulas for averages and probabilities merge into the analogous classical expressions in the region of large quantum numbers and also, of course, in the limit $h = 0$. In the present note we shall aim to trace through the asymptotic connection between the formulas of the two theories, which does not seem to have been quite adequately elucidated in existing papers.



WKB-wave function

It has been abundantly emphasized in the literature[3,4,5] that the analog of the wave equation (3) is the Hamilton-Jacobi equation

$$H(\partial S/\partial q;\ q) + \partial S/\partial t = 0. \tag{4}$$

Let $S(q_1, \ldots . q_s;\ \alpha_1, \ldots \alpha_s, t) + C$ be a "complete integral" of (4) involving s independent arbitrary constants $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ besides the trivial additive constant C. Then the equations

$$p_k = \partial S/\partial q_k,\ \beta_k = \partial S/\partial \alpha_k,\ (k = 1, \ldots, s) \tag{5}$$

define a canonical transformation from the p,q system to a set of new variables $\alpha_1, \ldots, \alpha_s;\ \beta_1, \ldots, \beta_s$.

It is, however, proved below that a second approximation is

$$(q/\alpha) = A^{\frac{1}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}} e^{S/ih} \tag{11}$$

where the constant A has the value (10).

where Δ is the functional determinant

$$\Delta = \frac{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_s)}{\partial(q_1, \ldots, q_s)} = \left| \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial \alpha_j} \right| \tag{8}$$

Classical continuity equation

$$-\frac{\partial S^{(\mathrm{cl})}}{\partial t} = \frac{(\boldsymbol{\nabla} S^{(\mathrm{cl})})^2}{2m} + V$$

$$D \equiv \left| \frac{\partial^2 S^{(\mathrm{cl})}}{\partial \varepsilon_j \partial x_k} \right|$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(D \, \frac{\boldsymbol{\nabla} S^{(\mathrm{cl})}}{m} \right) = 0$$

van Vleck (1928)

Classical mechanics and non-linear Schrödinger equation

$$\frac{\mathrm{i}\hbar}{2A}\left[\frac{\partial}{\partial t}A^2+\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(A^2\,\frac{\boldsymbol{\nabla}S^{(\mathrm{cl})}}{m}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}S^{(\mathrm{cl})}/\hbar}+\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\boldsymbol{\nabla}^2A}{A}\,\Phi=\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\hat{H}\Phi$$

$$\phi^{(\mathrm{cl})}\equiv D^{1/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S^{(\mathrm{cl})}/\hbar}$$

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\phi^{(\mathrm{cl})}}{\partial t}=\left[\hat{H}-Q[\phi^{(\mathrm{cl})}]\right]\phi^{(\mathrm{cl})}$$

$$Q[\phi]\equiv-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\boldsymbol{\nabla}^2|\phi|}{|\phi|}$$

Am. J. Phys. **32**, 597-600 (1964)

The Relation Between Classical and Quantum Mechanics

NATHAN ROSEN

Department of Physics, Israel Institute of Technology, Haifa, Israel

(Received 30 January 1964)

It is pointed out that, if classical mechanics is to be regarded as a limiting case of quantum mechanics, then it must admit superpositions of states, which are generally regarded as unacceptable. To avoid this it is proposed that classical mechanics be described by a nonlinear equation which is equivalent to the Hamilton–Jacobi equation and is not always the limit of the Schrödinger equation. It is conjectured that the transition from the wave-mechanical equation to the classical equation is characterized by a mass $m_0 = \hbar c/\gamma^{\frac{1}{2}} \approx 10^{-5}g$. This nonlinear equation may help one to understand the process of measurement of a quantum-mechanical system by means of a classical measuring instrument.

To avoid the "unclassical" states in classical mechanics, we are forced to take the second alternative. By subtracting V_Q from V in Eq. (1), we obtain a Schrödinger-like, but nonlinear, equation which is equivalent to Eqs. (4) and (6) and is given by

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+(V-V_Q)\Psi, \qquad (11)$$

or

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right.$$
$$\left.+\frac{\hbar^2}{4m}\frac{\Psi^*\Psi\nabla^2(\Psi^*\Psi)-\frac{1}{2}[\nabla(\Psi^*\Psi)]^2}{(\Psi^*\Psi)^2}\right\}\Psi. \qquad (12)$$

This, then is to be taken as the equation of classical mechanics, instead of Eq. (1), the wave equation of quantum mechanics. Eq. (12) admits all the usual solutions of classical mechanics but does not allow superpositions of these solutions.

PHYSICAL REVIEW VOLUME 125, NUMBER 3 FEBRUARY 1, 1962

Quasi-Classical Theory of the Nonspinning Electron*

RALPH SCHILLER†
Syracuse University, Syracuse, New York
(Received August 31, 1961)

We develop a modified Hamiltonian-Jacobi theory of classical mechanics following the early work of Van Vleck. This modified Hamiltonian-Jacobi theory, or quasi-classical theory, permits us to exhibit in classical mechanics many features that in the past have been exclusively associated with quantum mechanics. We deal with classical wave functions, classical operators, classical "eigenvalue" equations, a classical "sum over paths" formulation of classical mechanics, and with classical creation and destruction operators. Following Van Vleck, one can derive the WKB approximate solutions to the Schrödinger equation from the solutions of the classical Hamilton-Jacobi equation. If we apply the methods of Keller to the nonrelativistic and relativistic Kepler problem, we derive eigenvalues from the requirement of single-valuedness imposed on the WKB solutions. It turns out that the energy eigenvalues are those given by the Schrödinger equation and the Klein-Gordon equation, respectively. In the particular case of the harmonic oscillator there exists a canonical transformation which transforms the quasi-classical equation into an exact equation of quantum mechanics. We conjecture that if the WKB approximation and the Schrödinger equation predict the same eigenvalues, then there always exists a canonical transformation which transforms the quasi-classical equation into the corresponding Schrödinger equation. Finally we derive the quasi-classical equations in momentum space.

Linear Schrödinger equation

$$\frac{\mathrm{i}\hbar}{2A}\left[\frac{\partial}{\partial t}A^2 + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(A^2\,\frac{\boldsymbol{\nabla}S}{m}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}S/\hbar} - \left[\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\boldsymbol{\nabla}S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\boldsymbol{\nabla}^2 A}{A}\right]\Phi = \mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \hat{H}\Phi$$

$$\psi \equiv R^{(\mathrm{q})}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S/\hbar}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\left(R^{(\mathrm{q})}\right)^2 + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\left(R^{(\mathrm{q})}\right)^2\,\frac{\boldsymbol{\nabla}S}{m}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\boldsymbol{\nabla}S)^2}{2m} + V + Q[R^{(\mathrm{q})}]$$

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial \psi}{\partial t} - \hat{H}\psi = 0$$

A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I

DAVID BOHM*
Palmer Physical Laboratory, Princeton University, Princeton, New Jersey
(Received July 5, 1951)

4. NEW PHYSICAL INTERPRETATION OF SCHROEDINGER'S EQUATION

We shall now give a general description of our suggested physical interpretation of the present mathematical formulation of the quantum theory. We shall carry out a more detailed description in subsequent sections of this paper.

We begin with the one-particle Schroedinger equation, and shall later generalize to an arbitrary number of particles. This wave equation is

$$i\hbar\partial\psi/\partial t=-(\hbar^2/2m)\nabla^2\psi+V(\mathbf{x})\psi. \qquad (1)$$

Now ψ is a complex function, which can be expressed as

$$\psi=R\exp(iS/\hbar), \qquad (2)$$

where R and S are real. We readily verify that the equations for R and S are

$$\frac{\partial R}{\partial t}=-\frac{1}{2m}[R\nabla^2S+2\nabla R\cdot\nabla S], \qquad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\left[\frac{(\nabla S)^2}{2m}+V(\mathbf{x})-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2R}{R}\right]. \qquad (4)$$

It is convenient to write $P(\mathbf{x})=R^2(\mathbf{x})$, or $R=P^{\frac{1}{2}}$ where $P(\mathbf{x})$ is the probability density. We then obtain

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\nabla\cdot\left(P\frac{\nabla S}{m}\right)=0, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{(\nabla S)^2}{2m}+V(\mathbf{x})-\frac{\hbar^2}{4m}\left[\frac{\nabla^2P}{P}-\frac{1}{2}\frac{(\nabla P)^2}{P^2}\right]=0. \qquad (6)$$

Definition of a quantum wave

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}S/\hbar}\left[\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla}+\boldsymbol{\nabla}S\right)^2 A-\left(V+\frac{\partial S}{\partial t}\right)A\right]=\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\hat{H}\,\Phi$$

$$\psi\equiv R^{(\mathrm{q})}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S/\hbar}$$

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t}-\hat{H}\,\psi=0$$

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial R^{(\mathrm{q})}}{\partial t}-\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla}+\boldsymbol{\nabla}S\right)^2 R^{(\mathrm{q})}-\left(V+\frac{\partial S}{\partial t}\right)R^{(\mathrm{q})}=0$$

A complex amplitude

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial R^{(\mathrm{q})}}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{\nabla} S\right)^2 R^{(\mathrm{q})} - \left(V + \frac{\partial S}{\partial t}\right) R^{(\mathrm{q})} = 0$$

$$\left[\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{\nabla} S^{(\mathrm{cl})}}{m}\cdot\boldsymbol{\nabla} R + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\nabla} S^{(\mathrm{cl})}}{m}\right) R\right] - \mathrm{i}\,\frac{\hbar}{2m}\,\boldsymbol{\nabla}^2 R = 0$$

Schrödinger equation with classical mechanics

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}S/\hbar}\left[\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla}+\boldsymbol{\nabla}S\right)^2 A-\left(V+\frac{\partial S}{\partial t}\right)A\right]=\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\hat{H}\Phi$$

$$\psi\equiv R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S^{(\mathrm{cl})}/\hbar}$$

$$-\frac{\partial S^{(\mathrm{cl})}}{\partial t}=\frac{(\boldsymbol{\nabla}S^{(\mathrm{cl})})^2}{2m}+V$$

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla}+\boldsymbol{\nabla}S^{(\mathrm{cl})}\right)^2 R+\left(V+\frac{\partial S^{(\mathrm{cl})}}{\partial t}\right)R$$

Summary

- a brief history
- a curious mathematical identity
- Hamilton-Jacobi mechanics
- non-linear Schrödinger equation
- linear Schrödinger equation
- amplitude of quantum wave